9093

සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි / முழுப் பதிப்புரிமையுடையது / All Rights Reserved]

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2023(2024)
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2023(2024)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2023(2024)

සංයුක්ත ගණිතය I
இணைந்த கணிதம் I
Combined Mathematics I

10 T I

පැය තුනයි
மூன்று மணித்தியாலம்
Three hours

අමතර කියවීම් කාලය - මිනිත්තු 10 යි
மேலதிக வாசிப்பு நேரம் - 10 நிமிடங்கள்
Additional Reading Time - 10 minutes

வினாத்தாளை வாசித்து, வினாக்களைத் தெரிவுசெய்வதற்கும் விடை எழுதும்போது முன்னுரிமை வழங்கும் வினாக்களை ஒழுங்கமைத்துக் கொள்வதற்கும் மேலதிக வாசிப்பு நேரத்தைப் பயன்படுத்துக.

சுட்டெண்							

அறிவுறுத்தல்கள் :

※ இவ்வினாத்தாள் பகுதி **A** (வினாக்கள் **1 - 10**), பகுதி **B** (வினாக்கள் **11 - 17**) என்னும் இரு பகுதிகளைக் கொண்டது.

※ பகுதி **A :**
எல்லா வினாக்களுக்கும் விடை எழுதுக. ஒவ்வொரு வினாவுக்குமுரிய உமது விடைகளைத் தரப்பட்டுள்ள இடத்தில் எழுதுக. மேலதிக இடம் தேவைப்படுமெனின், நீர் மேலதிகத் தாள்களைப் பயன்படுத்தலாம்.

※ பகுதி **B :**
ஐந்து வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக. உமது விடைகளைத் தரப்பட்டுள்ள தாள்களில் எழுதுக.

※ ஒதுக்கப்பட்டுள்ள நேரம் முடிவடைந்ததும் பகுதி **A** இன் விடைத்தாளானது பகுதி **B** இன் விடைத்தாள்களுக்கு மேலே இருக்கத்தக்கதாக, இரு பகுதிகளையும் இணைத்துப் பரீட்சை மண்டப மேற்பார்வையாளரிடம் கையளிக்க.

※ வினாத்தாளின் பகுதி **B** ஐ மாத்திரம் பரீட்சை மண்டபத்திலிருந்து வெளியே எடுத்துச் செல்வதற்கு அனுமதிக்கப்படும்.

பரீட்சகர்களின் உபயோகத்திற்கு மாத்திரம்

(10) இணைந்த கணிதம் I		
பகுதி	வினா எண்	புள்ளிகள்
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	மொத்தம்	

மொத்தம்

இலக்கத்தில்	
எழுத்தில்	

குறியீட்டெண்கள்

விடைத்தாள் பரீட்சகர்		
பரிசீலித்தவர்:	1	
	2	
மேற்பார்வை செய்தவர்:		

[பக். 2 ஐப் பார்க்க

பகுதி A

1. $u_1 = 2$ இற்கும் எல்லா $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கும் $u_{n+1} = u_n + 2n$ எனக் கொள்வோம். **கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டைப்** பயன்படுத்தி, எல்லா $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கும் $u_n = n^2 - n + 2$ என நிறுவுக.

2. $y = \frac{1}{2}|x+1|$, $y = |2x| - 1$ என்பவற்றின் பரும்படி வரைபுகளை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக.
இதிலிருந்து அல்லது வேறு விதமாக, சமனிலி $4|x| - |x+1| \leq 2$ ஐத் திருப்தியாக்கும் x இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களையும் காண்க.

3. $|z-3| \leq 3$, $0 \leq \operatorname{Arg} z \leq \frac{\pi}{6}$ ஆகிய சமனிலிகளைத் திருப்தியாக்கும் சிக்கலெண்கள் z ஐ வகைகுறிக்கும் புள்ளிகளைக் கொண்ட பிரதேசம் S ஐ ஓர் ஆகண் வரிப்படத்தில் நிழற்றுக.
மேலும், S இன் பரப்பளவையும் காண்க.

4. $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$ இன் ஈருறுப்பு விரியில் x^{-3} இன் குணகம் x^{-2} இன் குணகத்தின் மூன்று மடங்கு எனக் காட்டுக.

[பக். 4 ஐப் பார்க்க

5. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(1+\cos \pi x)}{(x-1)^2} = \dfrac{\pi^2}{2}$ எனக் காட்டுக.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

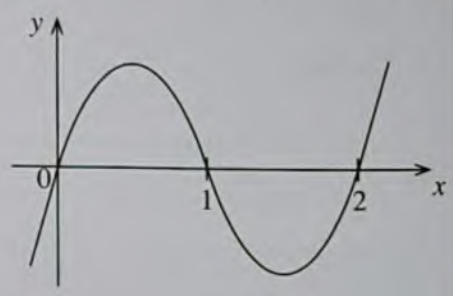
.....

.....

.....

.....

6. $f(x) = x(x-1)(x-2)$ எனக் கொள்வோம். $y = f(x)$ இன் பரும்படி வரைபு இவ்வுருவில் தரப்பட்டுள்ளது.



$\displaystyle\int_0^2 |f(x)|\, dx$ ஐக் காண்க.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

[பக். 5 ஐப் பார்க்க

7. $a > 0$ எனவும் C ஆனது $0 < \theta < \pi$ இற்கு $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ ஆகியவற்றினால் பரமானமுறையாகத் தரப்படும் வளையி எனவும் கொள்வோம். $\frac{dy}{dx} = \cot\frac{\theta}{2}$ எனக் காட்டுக. $\frac{d^2y}{dx^2}$ ஐ θ இற் கண்டு, C கீழ்முகமாகக் குவிவானது என உய்த்தறிக.

8. l_1, l_2 என்பன முறையே $2y - x - 2 = 0$, $y + 2x - 6 = 0$ ஆகியவற்றினால் தரப்படும் நேர்கோடுகளெனக் கொள்வோம். மேலும் l_1, l_2 ஆகியவற்றின் வெட்டுப் புள்ளியினூடாகவும் புள்ளி $(-4, 4)$ இனூடாகவும் செல்லும் நேர்கோடு l_3 இன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

l_3 ஆனது l_1 இற்கும் l_2 இற்குமிடையே உள்ள ஒரு கோணத்தின் இருகூறாக்கி எனவும் காட்டுக.

[பக். 6 ஐப் பார்க்க

9. வட்டம் $x^2 + y^2 = 4$ ஐ வெளிப்புறமாகத் தொடுவனவும் $y = 0$, $y = 2$ ஆகிய கோடுகளையும் தொடுவனவுமான வட்டங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

10. x இற்குத் தீர்க்க : $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{24}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

* *

[பக். 7 ஐப் பார்க்க

සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි / முழுப் பதிப்புரிமையுடையது / All Rights Reserved |

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2023 (2024)
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2023 (2024)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2023 (2024)

සංයුක්ත ගණිතය I
இணைந்த கணிதம் I
Combined Mathematics I

10 T I

பகுதி B

※ **ஐந்து** வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.

11. (*a*) $x \in \mathbb{R}$ இற்கு $f(x) = ax^2 + bx + c$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு $a > 0$ உடன் $a, b, c \in \mathbb{R}$ ஆகும். $f(x)$ இன் இழிவுப் பெறுமானம் $-\dfrac{\Delta}{4a}$ எனக் காட்டுக; இங்கு $\Delta = b^2 - 4ac$.

p, q ஆகியன நேர் மெய்யெண்கள் எனவும் $r \in \mathbb{R}$ எனவும் கொள்வோம். மேலும், $x \in \mathbb{R}$ இற்கு $g(x) = px^2 + 2\sqrt{pq}\, x + qr$ எனவும் கொள்வோம்.

சமன்பாடு $g(x) = 0$ இற்கு மெய்ம் மூலங்கள் இல்லையெனத் தரப்பட்டுள்ளது. $r > 1$ எனக் காட்டுக.

இப்போது, $g(x)$ இன் இழிவுப் பெறுமானம் q எனத் தரப்பட்டுள்ளது. $r = 2$ எனக் காட்டுக.

நேர்கோடு $y = x + 1$ ஆனது $r = 2$ ஆன வளையி $y = g(x)$ இற்குப் புள்ளி $(0, 1)$ இலான தொடலிக் கோடு எனின், p, q ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(*b*) $a \in \mathbb{R}$ எனவும் $p(x)$ ஆனது படி 4 ஆகவுள்ள ஒரு பல்லுறுப்பி எனவும் கொள்வோம். $(x - a)$ ஆனது $p(x)$, $p'(x)$ ஆகிய இரண்டினதும் ஒரு காரணியெனின், $(x - a)^2$ ஆனது $p(x)$ இன் ஒரு காரணியெனக் காட்டுக; இங்கு $p'(x)$ ஆனது $p(x)$ இன் x பற்றிய பெறுதியாகும்.

$x \in \mathbb{R}$ இற்கு $f(x) = x^4 - x^3 - 6x^2 + 4x + 8$ எனக் கொள்வோம். $(x - 2)^2$ ஆனது $f(x)$ இன் ஒரு காரணி என உய்த்தறிக.

$f(-1)$ இன் பெறுமானத்தைக் கண்டு, $f(x)$ ஐ முற்றாகக் காரணிகளாக வேறுபடுத்துக.

12. (*a*) நான்கு (4) ஆண்களையும் நான்கு (4) பெண்களையும் கொண்ட ஒரு குழுவை 8 ஆண்களையும் 6 பெண்களையும் கொண்ட ஒரு குழுமத்திலிருந்து தெரிந்தெடுக்க வேண்டியுள்ளது.

(i) குழு தெரிந்தெடுக்கப்படத்தக்க வெவ்வேறு விதங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(ii) அத்தகைய ஒரு குழு தெரிந்தெடுக்கப்படுகின்றதெனக் கொள்வோம். இரு பெண்கள் அடுத்தடுத்து அமரமுடியாதெனின், அக்குழுவின் அங்கத்தவர்கள் ஒரு நிரையில் அமரத்தக்க வெவ்வேறு விதங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

|பக். 8 ஐப் பார்க்க

(*b*) எல்லா $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கும் $\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{n}{4}(n+1)(n+2)(n+3)$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

எல்லா $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கும் $U_n = n(n+1)(n+2)$ எனக் காட்டுக.

எல்லா $r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கும் $V_r = \frac{1}{U_r}$ எனக் கொள்வோம்.

எல்லா $r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கும் $V_r = \frac{A}{r(r+1)} + \frac{B}{(r+1)(r+2)}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக A, B ஆகிய மெய்ம் மாறிலிகளைக் காண்க.

இதிலிருந்து அல்லது வேறு விதமாக, $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $\sum_{r=1}^{n} V_r = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$ எனக் காட்டுக.

முடிவில் தொடர் $\sum_{r=1}^{\infty} V_r$ ஒருங்குகின்றதென மேலும் காட்டி, அதன் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

$\sum_{r=m}^{\infty} V_r = \frac{1}{24}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக $m \in \mathbb{Z}^+$ ஐக் காண்க.

13. (*a*) $a \in \mathbb{R}$ எனவும் $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$ எனவும் கொள்வோம். $\mathbf{A}^{-1}$ இருக்கின்றதெனக் காட்டி, $\mathbf{A}^{-1}$ ஐ எழுதுக.

$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ எனக் கொள்வோம்.

(i) $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{\mathbf{T}} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக a இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(ii) $\mathbf{BC} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாகத் தாயம் $\mathbf{C}$ ஐக் காண்க.

(*b*) $z \in \mathbb{C}$ எனக் கொள்வோம். z இன் சிக்கல் உடன்புணரி $\bar{z}$ ஐயும் z இன் மட்டு $|z|$ ஐயும் வரையறுக்க.

$|z| = 1$ எனின், $\bar{z} = \frac{1}{z}$ எனக் காட்டி, எந்த $w \in \mathbb{C}$ இற்கும் $|z - w| = |1 - \bar{z}w|$ என உய்த்தறிக.

இப்போது, $z = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{3}i\right)$ எனக் கொள்வோம். $|z|$ ஐயும் $\operatorname{Arg} z$ ஐயும் காண்க.

$|w| < 1$ ஆகவும் $\operatorname{Arg} w = \alpha$ ஆகவும் இருக்கத்தக்கதாக $w \in \mathbb{C}$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$.

அத்தகைய ஒரு சிக்கலெண் w ஐத் தெரிந்தெடுத்து, $1, z, w, \bar{z}w$ ஆகியவற்றை வகைகுறிக்கும் புள்ளிகளை ஓர் ஆகண் வரிப்படத்திற் குறித்து ஏன் $|z - w| = |1 - \bar{z}w|$ எனக் கேத்திரகணிதமுறையாக விளக்குக.

(*c*) $n \in \mathbb{Z}^+$ எனக் கொள்வோம். $\dfrac{\left(\cos\frac{2\pi}{15} + i\sin\frac{2\pi}{15}\right)^n}{\left(\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15}\right)^7}$ இன் மெய்ப் பகுதி $\frac{1}{2}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக n இன் மிகச் சிறிய பெறுமானத்தைக் காண்க.

[பக். 9 ஐப் பார்க்க

14. (*a*) $a, p, q \in \mathbb{R}$ எனவும் $p < q$ எனவும் கொள்வோம்.

$x \in \mathbb{R} - \{p, q\}$ இற்கு $f(x) = \dfrac{(ax+1)(x+2)}{(x-p)(x-q)}$ எனக் கொள்வோம்.

$y = f(x)$ இன் வரையின் நிலைக்குத்து அணுகுகோடுகள் $x = 1$ எனவும் $x = -4$ எனவும் தரப்பட்டுள்ளன. p, q ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களை எழுதுக.

$y = 1$ ஆனது $y = f(x)$ இன் வரையின் ஒரு கிடை அணுகுகோடெனத் தரப்படும்போது $a = 1$ எனக் காட்டுக.

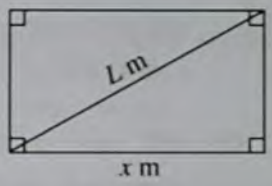
a, p, q ஆகியவற்றின் இப்பெறுமானங்களுக்கு $f(x)$ அதிகரிக்கும் ஆயிடைகளையும் $f(x)$ குறையும் ஆயிடைகளையும் காண்க.

$g(x) = f(x) + 1$ எனக் கொள்வோம்.

அணுகுகோடுகளையும் திரும்பற் புள்ளிகளையும் காட்டி, $y = g(x)$ இன் வரையின் ஒரு பரும்படி வரிப்படத்தை வரைக.

$g(x)$ இன் வீச்சை எழுதுக.

(*b*) k m^2 பரப்பளவு உள்ள ஒரு செவ்வகப் பிரதேசத்தின் ஒரு மூலைவிட்டத்தின் வழியே ஒரு வேலியை அமைக்க வேண்டியுள்ளது. செவ்வகத்தின் நீளம் x m எனக் கொள்வோம் (உருவைப் பார்க்க). வேலியின் நீளம் L m ஆனது $L^2 = x^2 + \dfrac{k^2}{x^2}$ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக.



இதிலிருந்து, L இழிவாக இருப்பது $x = \sqrt{k}$ ஆக இருக்கும்போதாகும் எனக் காட்டுக.

15. (*a*) $k \in \mathbb{R}$ எனக் கொள்வோம். $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(x-k)}\,\mathrm{d}x$ ஐக் காண்க.

(*b*) $\displaystyle\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} x\sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$ இற்குப் பகுதிகளாகத் தொகையிடலைப் பிரயோகித்து அல்லது வேறு விதமாக,

$\displaystyle\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} x\{2\sin(\ln x) + \cos(\ln x)\}\,\mathrm{d}x = e^{\pi}$ எனக் காட்டுக.

(*c*) $k > 0$ எனக் கொள்வோம். $x > 0$ இற்கு $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\left(k\sqrt{x} - 1\right)e^{k\sqrt{x}}\right\} = \dfrac{k^2}{2}e^{k\sqrt{x}}$ எனக் காட்டுக.

$I_k = \displaystyle\int_1^4 e^{k\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ எனவும் கொள்வோம். $I_k = \dfrac{2}{k^2}\left\{(2k-1)e^{2k} - (k-1)e^{k}\right\}$ எனக் காட்டுக.

S ஆனது $y = e^{\sqrt{x}}, x = 1, x = 4, y = 0$ ஆகிய வளையிகளினால் உள்ளடைக்கப்படும் பிரதேசமெனக் கொள்வோம்.

S இன் பரப்பளவு $2e^2$ எனக் காட்டுக.

பிரதேசம் S ஐ x-அச்சைப் பற்றி 2π ஆரையன்களினூடாகச் சுழற்றும்போது பிறப்பிக்கப்படும் திண்மத்தின் கனவளவையும் காண்க.

[பக். 10 ஐப் பார்க்க

16. $m \in \mathbb{R}$ எனவும் l ஆனது படித்திறன் m ஐ உடையதும் புள்ளி $A \equiv (3, 1)$ இனூடாகச் செல்வதுமான கோடு எனவும் கொள்வோம்.

l இன் சமன்பாட்டை m இல் எழுதுக.

புள்ளி A இனூடாக வட்டம் $S_1 \equiv 5x^2 + 5y^2 - 10x + 10y + 6 = 0$ இற்கு இரு தொடலிகள் இருக்கின்றன எனக் காட்டி, அவற்றுக்கிடையே உள்ள கூர்ங்கோணத்தைக் காண்க.

B, D ஆகியன இத்தொடலிகள் வட்டம் $S_1 = 0$ ஐத் தொடும் புள்ளிகள் எனவும் C ஆனது $S_1 = 0$ இன் மையம் எனவும் கொள்வோம்.

$ABCD$ ஒரு வட்ட நாற்பக்கலெனக் காட்டி, A, B, C, D ஆகிய புள்ளிகளினூடாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தொடுகை நாண் BD இன் சமன்பாட்டைக் கண்டு, B, D ஆகியவற்றினூடாகச் செல்வதுவும் வட்டம் $S_1 = 0$ ஐ நிமிர்கோணமுறையாக இடைவெட்டுவதுமான வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

17. (*a*) $\theta \in \mathbb{R}$ இற்கு $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ எனக் காட்டுக.

$\cos^2 x - 1 = \sin^2 x + 3\cos x$ என்னும் சமன்பாட்டைத் திருப்தியாக்கும் ஆயிடை $[0, 2\pi)$ இல் உள்ள x இன் எல்லாப் பெறுமானங்களையும் காண்க.

(*b*) ABC ஒரு முக்கோணியெனக் கொள்வோம். வழக்கமான குறிப்பீட்டில், பேறு $A + B + C = \pi$ ஐப் பயன்படுத்தி $\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}$ எனவும் $\cos\left(\frac{B+C}{2}\right) = \sin\frac{A}{2}$ எனவும் காட்டுக.

$\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} = \cos\frac{A}{2}\sec\frac{B}{2}\sec\frac{C}{2}$ எனவும் $1 - \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} = \sin\frac{A}{2}\sec\frac{B}{2}\sec\frac{C}{2}$ எனவும் உய்த்தறிக.

இதிலிருந்து, $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1$ எனக் காட்டுக.

(*c*) $x \in \mathbb{R}$ இற்கு $\tan^{-1}(2x) + \tan^{-1}(3x) = \frac{3\pi}{4}$ ஐத் தீர்க்க.

* * *

සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි / முழுப் பதிப்புரிமையுடையது / All Rights Reserved]

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2023 (2024)
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2023 (2024)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2023 (2024)

සංයුක්ත ගණිතය II
இணைந்த கணிதம் II
Combined Mathematics II

10 T II

පැය තුනයි
மூன்று மணித்தியாலம்
Three hours

අමතර කියවීම් කාලය - මිනිත්තු 10 යි
மேலதிக வாசிப்பு நேரம் - 10 நிமிடங்கள்
Additional Reading Time - 10 minutes

வினாத்தாளை வாசித்து, வினாக்களைத் தெரிவுசெய்வதற்கும் விடை எழுதும்போது முன்னுரிமை வழங்கும் வினாக்களை ஒழுங்கமைத்துக் கொள்வதற்கும் மேலதிக வாசிப்பு நேரத்தைப் பயன்படுத்துக.

சுட்டெண்							

அறிவுறுத்தல்கள் :

- இவ்வினாத்தாள் பகுதி **A** (வினாக்கள் **1 - 10**), பகுதி **B** (வினாக்கள் **11 - 17**) என்னும் இரு பகுதிகளைக் கொண்டது.
- பகுதி **A :**
  எல்லா வினாக்களுக்கும் விடை எழுதுக. ஒவ்வொரு வினாவுக்குமுரிய உமது விடைகளைத் தரப்பட்டுள்ள இடத்தில் எழுதுக. மேலதிக இடம் தேவைப்படுமெனின், நீர் மேலதிகத் தாள்களைப் பயன்படுத்தலாம்.
- பகுதி **B :**
  ஐந்து வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக. உமது விடைகளைத் தரப்பட்டுள்ள தாள்களில் எழுதுக.
- ஒதுக்கப்பட்டுள்ள நேரம் முடிவடைந்ததும் பகுதி **A** இன் விடைத்தாளானது பகுதி **B** இன் விடைத்தாள்களுக்கு மேலே இருக்கத்தக்கதாக இரு பகுதிகளையும் இணைத்துப் பரீட்சை மண்டப மேற்பார்வையாளரிடம் கையளிக்க.
- வினாத்தாளின் பகுதி **B** ஐ மாத்திரம் பரீட்சை மண்டபத்திலிருந்து வெளியே எடுத்துச் செல்வதற்கு அனுமதிக்கப்படும்.
- இவ்வினாத்தாளில் g ஆனது புவியீர்ப்பினாலான ஆர்முடுகலைக் குறிக்கின்றது.

பரீட்சகர்களின் உபயோகத்திற்கு மாத்திரம்

(10) இணைந்த கணிதம் II		
பகுதி	வினா எண்	புள்ளிகள்
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	மொத்தம்	

மொத்தம்

இலக்கத்தில்	
எழுத்தில்	

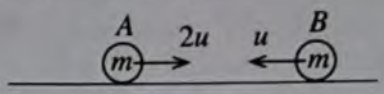
குறியீட்டெண்கள்

விடைத்தாள் பரீட்சகர்		
பரிசீலித்தவர்:	1	
	2	
மேற்பார்வை செய்தவர்		

[பக். 2 ஐப் பார்க்க

பகுதி A

1. ஓர் ஒப்பமான கிடை மேசை மீது ஒரே நேர்கோடு வழியே முறையே $2u, u$ ஆகிய கதிகளுடன் ஒன்றையொன்று நோக்கி இயங்கும் ஒவ்வொன்றினதும் திணிவு m ஆகவுள்ள A, B என்னும் இரு துணிக்கைகள் நேரடியாக மோதுகின்றன.



A இற்கும் B இற்குமிடையே உள்ள மீளமைவுக் குணகம் e ஆகும். மோதுகைக்குப் பின்னர் A, B ஆகியவற்றின் வேகங்களைக் கண்டு, $e = \frac{1}{3}$ எனின், மோதுகைக்குப் பின்னர் A ஓய்வுக்கு வருமெனக் காட்டுக.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

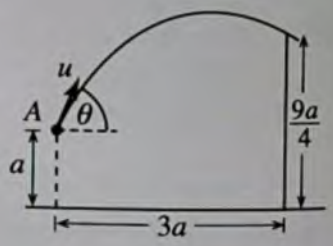
.....

.....

.....

.....

2. ஒரு கிடைத் தரைக்கு மேலே தூரம் a இல் உள்ள ஒரு புள்ளி A இலிருந்து கிடையுடன் கோணம் $\theta\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ இல் தொடக்க வேகம் $u = 3\sqrt{\frac{ga}{2}}$ உடன் ஒரு துணிக்கை எறியப்படுகின்றது. அது A இலிருந்து ஒரு கிடைத் தூரம் $3a$ இல் இருக்கும் $\frac{9a}{4}$ உயரமுள்ள ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவரை மட்டுமட்டாகக் கடந்து செல்கின்றது (உருவைப் பார்க்க).



$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$ எனக் காட்டுக.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

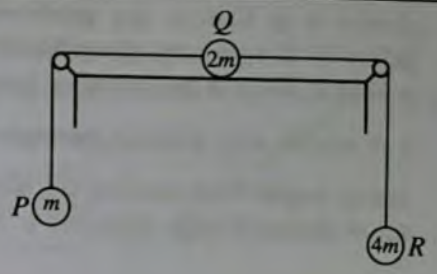
.....

.....

.....

[பக். 3 ஐப் பார்க்க

3. உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு முறையே $m, 2m, 4m$ திணிவுகளை உடைய P, Q, R என்னும் மூன்று துணிக்கைகள் ஓர் ஒப்பமான கிடை மேசையின் இரு ஓரங்களில் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ள இரு சிறிய ஒப்பமான கப்பிகளுக்கு மேலாகச் செல்லும் இரு இலேசான நீட்டமுடியாத இழைகளினால் தொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இழைகள் இறுக்கமாக இருக்கும்போது தொகுதி ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது. R இன் ஆர்முடுகலைத் துணிவதற்குப் போதிய சமன்பாடுகளைப் பெறுக.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. 1000 kg திணிவுள்ள ஒரு வான் 800 N பருமனுள்ள ஒரு மாறாத் தடைக்கு எதிரே ஒரு நேர்க் கிடை வீதி வழியே செல்கின்றது. அது ஓர் 50 m s^{-1} மாறாக் கதியுடன் இயங்கும்போது வானின் எஞ்சினின் வலுவைக் காண்க.

இப்போது வான் $(800 + 4v)$ N தடைக்கு எதிரே வேறொரு நேர்க் கிடைப் பாதை வழியே செல்கின்றது; இங்கு v m s^{-1} ஆனது வானின் கதியாகும். வானின் எஞ்சின் அதே வலுவில் தொழிற்படுமெனின், அதன் கதி 20 m s^{-1} ஆக இருக்கும் கணத்தில் வானின் ஆர்முடுகலைக் காண்க.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

[பக். 4 ஐப் பார்க்க

5. திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P ஆனது நீளம் l ஐ உடைய ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையினால் ஒரு நிலைத்த ஒப்பமான செவ்வட்டக் கூம்பின் உச்சியுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. கூம்பின் அரையுச்சிக் கோணம் $\frac{\pi}{3}$ உம் கூம்பின் அச்சு நிலைக்குத்தானதுமாகும் (உருவைப் பார்க்க). துணிக்கை P ஆனது கூம்பின் மேற்பரப்பு மீது ஒரு கிடை வட்டத்தில் கோணக் கதி $\omega = \sqrt{\frac{2g}{l}}$ உடன் இயங்குகின்றது. இழையில் உள்ள இழுவையைக் காண்க.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

6. வழக்கமான குறிப்பீட்டில், ஒரு நிலைத்த உற்பத்தி O பற்றி A, B என்னும் இரு புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் முறையே $2\mathbf{i} + \mathbf{j}, 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ எனக் கொள்வோம். C ஆனது $2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{OC}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக உள்ள புள்ளி எனவும் கொள்வோம். $\overrightarrow{OC}$ ஐ $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ ஆகியவற்றிற் கண்டு, $\overrightarrow{OC}$ இன் திசையில் உள்ள அலகுக் காவியை $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ ஆகியவற்றிற் காண்க.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

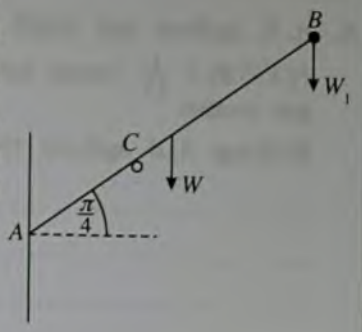
.....

.....

.....

[பக். 5 ஐப் பார்க்க

7. $4a$ நீளமும் W நிறையும் உள்ள ஒரு சீரான கோல் AB அதன் முனை A ஓர் ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவருக்கு எதிரே இருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. $AC = \frac{3a}{2}$ ஆக இருக்குமாறு கோல் மீது உள்ள புள்ளி C இல் இருக்கும் ஒரு முளை மீது கோல் வைக்கப்பட்டுள்ளது. நிறை W_1 ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை கோலின் மற்றைய முனையாகிய B இல் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு கோல் கிடையுடன் கோணம் $\frac{\pi}{4}$ ஐ ஆக்குகின்றது. கோல் நாப்பத்தில் உள்ளது. $W_1 = W$ எனக் காட்டுக.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

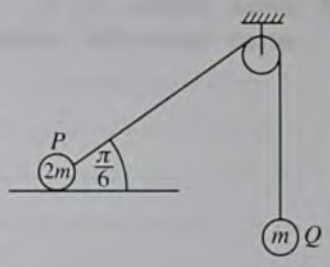
.....

.....

.....

.....

8. திணிவு $2m$ ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P ஒரு கரடான கிடை மேசை மீது உள்ளது. உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு ஒரு நிலைத்த ஒப்பமான கப்பிக்கு மேலாகச் செல்லும் ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையின் ஒரு நுனி துணிக்கை P உடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கும் அதே வேளை மற்றைய நுனி திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை Q உடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. துணிக்கை P இற்கும் கப்பிக்குமிடையே உள்ள இழையின் பகுதி மேசையுடன் ஒரு கோணம் $\frac{\pi}{6}$ ஐ ஆக்குகின்றது. இழை இறுக்கமாக இருக்கத் தொகுதி நாப்பத்தில் இருக்கின்றது. துணிக்கை P இற்கும் மேசைக்குமிடையே உள்ள உராய்வுக் குணகம் μ ஆனது $\mu \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$ ஐத் திருப்தியாக்குகின்றதெனக் காட்டுக.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

[பக். 6 ஐப் பார்க்க

9. A, B ஆகியன ஒரு மாதிரி வெளி Ω இன் இரு நிகழ்வுகளெனக் கொள்வோம். $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ எனவும் $P(A' \cap B) = \frac{1}{12}$ எனவும் தரப்பட்டுள்ளது; இங்கு A' ஆனது A இன் நிரப்பு நிகழ்வைக் குறிக்கின்றது. $P(B)$ ஐக் காண்க.

இப்போது A, B ஆகியன சாரா நிகழ்வுகள் எனவும் தரப்பட்டுள்ளது. $P(A \cup B)$ ஐக் காண்க.

10. தரவுத் தொடை $\{x_1, x_2, \ldots, x_{10}\}$ இன் இடை 30 உம் $\sum_{i=1}^{10}(x_i - 20)^2 = 1040$ உம் ஆகும். மேற்குறித்த தரவுத் தொடையின் மாறற்றிறனைக் காண்க.

* *

[பக். 7 ஐப் பார்க்க

සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි / முழுப் பதிப்புரிமையுடையது / All Rights Reserved]

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2023(2024)
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2023(2024)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2023(2024)

සංයුක්ත ගණිතය II
இணைந்த கணிதம் II
Combined Mathematics II

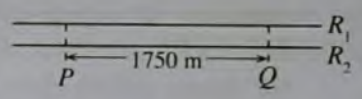
10 T II

பகுதி B

※ ஐந்து வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.

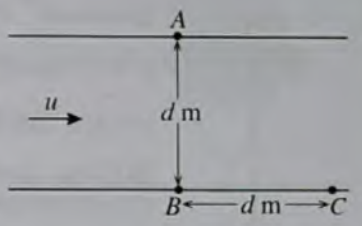
(இவ்வினாத்தாளில் g ஆனது புவியீர்ப்பினாலான ஆர்முடுகலைக் குறிப்பிடுகின்றது.)

11. (*a*) இடைத்தூரம் 1750 m இல் உள்ள P, Q என்னும் இரு புகையிரத நிலையங்களுக்கிடையே R_1, R_2 என்னும் இரு நேர்ச் சமாந்தரப் புகையிரதப் பாதைகள் இருக்கின்றன. $t = 0$ இல் புகையிரத நிலையம் P இலிருந்து ஓய்வினின்றும் புறப்படும் ஒரு புகையிரதம் A ஆனது சீரான ஆர்முடுகல் $10\ \text{m s}^{-2}$ உடன் புகையிரதப் பாதை R_1 வழியே T செக்கனிற்குச் சென்று $t = T$ s இல் அது பெற்ற கதியை 30 செக்கனிற்குப் பேணுகின்றது. பின்னர் அது T செக்கனிற்குச் சீராக அமர்முடுகிப் புகையிரத நிலையம் Q இல் ஓய்விற்கு வருகின்றது. P இலிருந்து Q இற்குப் புகையிரதம் A இன் இயக்கத்திற்கான வேக-நேர வரையின் ஒரு பரும்படிப் படத்தை வரைந்து இப்பயணத்திற்கு எடுக்கும் மொத்த நேரம் 40 s எனக் காட்டுக.



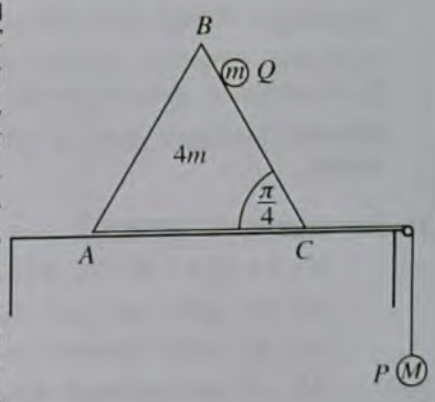
$\overrightarrow{PQ}$ இன் திசையில் மாறாக் கதி $40\ \text{m s}^{-1}$ உடன் புகையிரதப் பாதை R_2 வழியே செல்லும் வேறொரு புகையிரதம் B ஆனது $t = 0$ இல் புகையிரத நிலையம் P ஐக் கடக்கின்றது. $t = 0$ தொடக்கம் $t = 40$ s வரைக்கும் புகையிரதம் B தொடர்பாகப் புகையிரதம் A இன் இயக்கத்திற்கான வேக-நேர வரையின் ஒரு பரும்படி வரிப்படத்தை வரைக.

(*b*) இரு நேர்ச் சமாந்தரக் கரைகளுக்கிடையே d m அகலமுள்ள ஓர் ஆறு சீரான கதி $u\ \text{m s}^{-1}$ உடன் பாய்கின்றது. நீர் தொடர்பான கதி $\sqrt{2}\,u\ \text{m s}^{-1}$ ஐ உடைய ஒரு நீச்சற்காரர் P ஒரு கரையில் உள்ள புள்ளி A இல் ஆரம்பித்து A இற்கு நேரடியாக எதிரே மற்றைய கரையில் உள்ள ஒரு புள்ளி B ஐ அடைவதற்காக நீந்துகின்றார். நீச்சற்காரர் P புள்ளி B ஐ அடைவதற்கு எடுக்கும் நேரம் $\frac{d}{u}$ s எனக் காட்டுக.



நீர் தொடர்பான கதி $2\sqrt{2}\,u\ \text{m s}^{-1}$ ஐ உடைய ஓர் இரண்டாம் நீச்சற்காரர் Q என்பவர் B இலிருந்து ஆற்றின் போக்கில் தூரம் d m இல் அதே கரையில் உள்ள ஒரு புள்ளி C இல் ஆரம்பித்து நீச்சற்காரர் P ஐச் சந்திக்கும் நோக்குடன் நீந்துகின்றார் (உருவைப் பார்க்க). P, Q ஆகிய நீச்சற்காரர்கள் ஒரே கணத்தில் நீந்துவதற்கு ஆரம்பிக்கின்றனரெனக் கொண்டு நீச்சற்காரர் P புள்ளி B ஐ அடைவதற்கு முன்பாக நீச்சற்காரர் Q நீச்சற்காரர் P ஐச் சந்திப்பாரெனக் காட்டுக.

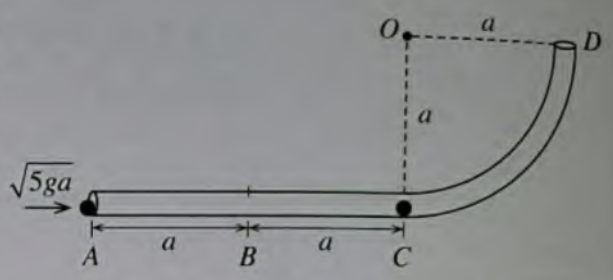
12. (*a*) திணிவு $4m$ ஐ உடைய ஓர் ஒப்பமான சீரான ஆப்பின் புவியீர்ப்பு மையத்தினூடாக உள்ள நிலைக்குத்துக் குறுக்குவெட்டு ABC உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளது. AC ஐக் கொண்டுள்ள முகம் ஓர் ஒப்பமான கிடை மேசை மீது வைக்கப்பட்டுள்ளது. மேலும் AB, BC ஆகியன அவற்றைக் கொண்டுள்ள முகங்களின் அதியுயர் சரிவுக் கோடுகளாக இருக்கும் அதே வேளை $A\hat{C}B = \frac{\pi}{4}$ ஆகும். ஆப்பின் புள்ளி C உம் திணிவு M ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P உம் மேசையின் ஒரு விளிம்பில் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ள ஒரு சிறிய ஒப்பமான கப்பிக்கு மேலாகச் செல்லும் ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையின் நுனிகளுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இழையானது ABC ஐக் கொண்டுள்ள அதே நிலைக்குத்துத் தளத்தில் இருக்கின்றது. திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை Q ஆனது BC மீது பிடித்து வைத்திருக்கப்படுகின்றது. துணிக்கை P சுயாதீனமாகத் தொங்குகின்றது. இழை இறுக்கமாக இருக்கத் தொகுதி ஓய்விலிருந்து இவ்வமைவினின்றும் விடுவிக்கப்படுகின்றது.



$m < 2M$ எனின், துணிக்கை P நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கி இயங்குகின்றதெனக் காட்டுக.
$m = 2M$ எனின், ஒவ்வொரு துணிக்கையினதும் ஆப்பினதும் இயக்கங்களை விவரிக்க.

[பக். 8 ஐப் பார்க்க

(*b*) உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு ஒரு மெல்லிய குழாய் $ABCD$ ஆனது ABC கிடையாக இருக்குமாறு ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. AB, BC ஆகிய பகுதிகள் ஒவ்வொன்றினதும் நீளம் a ஆக இருக்கும் அதே வேளை பகுதி CD ஆனது ஆரை a ஐயும் மையம் O ஐயும் உடையதும் OC நிலைக்குத்தானதுமான ஒரு கால் வட்டம் ஆகும்.



திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P ஆனது குழாயினுள்ளே புள்ளி C இல் வைக்கப்பட்டுள்ளது. திணிவு m ஐ உடைய வேறொரு துணிக்கை Q ஆனது குழாயினுள்ளே புள்ளி A இல் வைக்கப்பட்டு, அதற்கு $\overrightarrow{AB}$ இன் திசையில் பருமன் $\sqrt{5ga}$ ஐ உடைய ஒரு வேகம் தரப்படுகின்றது.

துணிக்கை Q இற்கும் பகுதி AB இற்குமிடையே உள்ள உராய்வுக் குணகம் $\frac{1}{2}$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை பகுதி BCD ஒப்பமானதாகும்.

துணிக்கை Q ஆனது குழாயினூடாக இயங்கித் துணிக்கை P உடன் மோதி ஒன்றிணைகின்றது. இச்சேர்த்தித் துணிக்கை R இயங்கத் தொடங்கும் வேகத்தைக் காண்க.

$\overrightarrow{OR}$ ஆனது, கீழ்முக நிலைக்குத்துடன் கோணம் θ இனூடாகத் திரும்பும்போது துணிக்கை R இன் கதி v ஆனது $v^2 = ga(2\cos\theta - 1)$ இனால் தரப்படும் எனக் காட்டி, துணிக்கை R குழாயினுள்ளே கணநிலை ஓய்வுக்கு வரும் கணத்தில் குழாயிலிருந்து துணிக்கை R மீது உள்ள மறுதாக்கத்தைக் காண்க.

13. ஒவ்வொன்றும் திணிவு m ஐ உடைய இரு துணிக்கைகளை ஒருமிக்க ஒட்டிச் சேர்ப்பதன் மூலம் திணிவு $2m$ ஐ உடைய ஒரு சேர்த்தித் துணிக்கை P ஆக்கப்பட்டுள்ளது. இயற்கை நீளம் a ஐயும் மீள்தன்மை மட்டு $2mg$ ஐயும் உடைய ஓர் இலேசான மீள்தன்மை இழையின் ஒரு நுனி ஒரு கிடைச் சீலிங்கின் மீது உள்ள ஒரு நிலைத்த புள்ளி O உடனும் மற்றைய நுனி சேர்த்தித் துணிக்கை P உடனும் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. துணிக்கை P ஒரு புள்ளி A இல் நாப்பத்தில் தொங்குகின்றது. இந்நாப்பத் தானத்தில் இழையின் நீட்சியைக் காண்க.

துணிக்கை P ஆனது A இலிருந்து தூரம் $\frac{a}{2}$ இற்குக் கீழ்நோக்கி இழுக்கப்பட்டு விடுவிக்கப்படுமெனின், P இன் இயக்கச் சமன்பாடு $-\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2}$ இற்கு $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ எனக் காட்டுக; இங்கு $\omega = \sqrt{\frac{g}{a}}$ உம் $AP = x$ உம் ஆகும்.

இப்போது துணிக்கை P ஆனது A இலிருந்து தூரம் l இற்குக் கீழ்நோக்கி இழுக்கப்பட்டு விடுவிக்கப்படுகின்றது.

துணிக்கை P ஒரு முழுமையான எளிய இசை இயக்கத்தை ஆற்றுவதற்கு l இன் உயர்ந்தபட்சப் பெறுமானம் யாது?

துணிக்கை P ஆனது கதி $\sqrt{ag}$ உடன் புள்ளி O இல் அடிப்பதற்கு l இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

துணிக்கை P ஆனது இக்கதியில் O இற் படும்போது திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை கழன்று விழுகின்றது. சீலிங்கு மீள்தன்மையின்றியது.

எஞ்சியுள்ள துணிக்கை புவியீர்ப்பின் கீழ் உள்ள அதன் இயக்கத்தின் பின்னர் ஆற்றும் புதிய எளிய இசை இயக்கத்திற்கான இயக்கச் சமன்பாட்டைப் பெறுக.

இத்தனித் துணிக்கை முதல் தடவை கணநிலை ஓய்வுக்கு வருவதற்கு O இலிருந்து எடுக்கும் நேரத்தைக் காண்க.

14. (*a*) வழக்கமான குறிப்பீட்டில், A, B, C, D ஆகிய நான்கு புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் முறையே $\mathbf{a} = -\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\mathbf{c} = 8\mathbf{i} + \alpha\mathbf{j}$, $\mathbf{d} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ ஆகும்; இங்கு $\alpha \in \mathbb{R}$.

AB, DC ஆகிய கோடுகள் சமாந்தரமாகும். $\alpha = 8$ எனக் காட்டுக.

AC, BD ஆகிய கோடுகள் தானக் காவி $\mathbf{e}$ ஆகவுள்ள ஒரு புள்ளி E இல் இடைவெட்டுகின்றன.

$\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AC}$ ஆகியவற்றைக் கருதுவதன் மூலம், $\lambda \in \mathbb{R}$ இற்கு $\mathbf{e} = (1-\lambda)\mathbf{a} + \lambda\mathbf{c}$ எனக் காட்டுக.

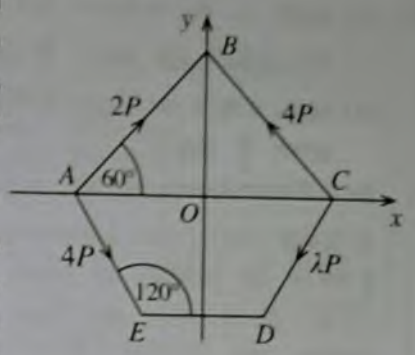
இவ்வாறே, $\mu \in \mathbb{R}$ இற்கு $\mathbf{e} = (1-\mu)\mathbf{b} + \mu\mathbf{d}$ எனவும் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $\mathbf{e}$ ஐ $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ ஆகியவற்றிற் காண்க.

$\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{ED}$ ஐக் கருதுவதன் மூலம் $A\hat{E}D$ ஐக் காண்க.

[பக். 9 ஐப் பார்க்க

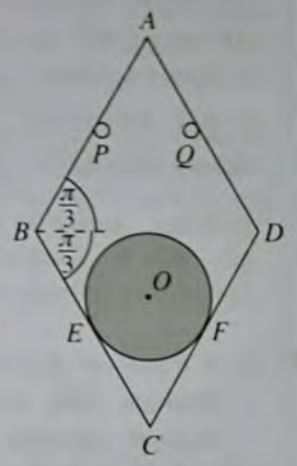
(*b*) உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ள ஐங்கோணி $ABCDE$ ஆனது y-அச்சுப் பற்றிச் சமச்சீரானது. A, C ஆகிய உச்சிகள் x-அச்சு மீதும் உச்சி B ஆனது y-அச்சு மீதும் உள்ளன. மேலும் $AC = 4a$, $DE = 2a$, $A\hat{E}D = 120^\circ$, $O\hat{A}B = 60^\circ$ ஆகும்; இங்கு O உற்பத்தியாகும்.



$2P, 4P, \lambda P, 4P$ என்னும் பருமன்களை உடைய நான்கு விசைகள் முறையே $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AE}$ வழியே தாக்குகின்றன; இங்கு $\lambda \in \mathbb{R}$. இவ்விசைத் தொகுதி O இனூடாகத் தாக்கும் ஒரு தனி விசை $\mathbf{R}$ இற்குச் சமவலுவுள்ளதெனத் தரப்பட்டுள்ளது. λ இன் பெறுமானத்தையும் $\mathbf{R}$ இன் பருமனையும் திசையையும் காண்க.

இப்போது, $\overrightarrow{DE}$ வழியே தாக்கும் பருமன் $2P$ ஐ உடைய ஒரு விசையும் இடஞ்சுழிப் போக்கில் தாக்கும் திருப்பம் $4\sqrt{3}Pa$ ஐ உடைய ஓர் இணையும் மேற்குறித்த தொகுதியுடன் சேர்க்கப்படுகின்றன. புதிய தொகுதி ஒடுங்கும் தனி விசையின் பருமன், திசை, தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாடு ஆகியவற்றைக் காண்க.

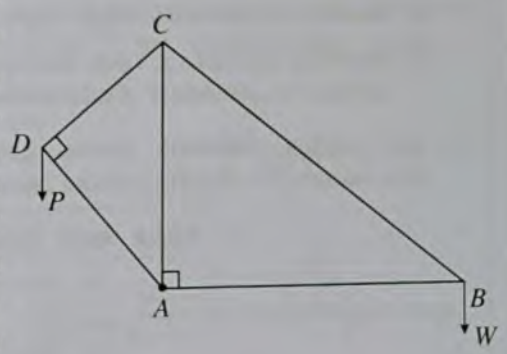
15. (*a*) சம நீளம் $2a$ ஐயும் சம நிறை W ஐயும் உடைய AB, BC, CD, DA என்னும் நான்கு சீரான கோல்கள் A, B, C, D ஆகிய புள்ளிகளில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. மையம் O ஐயும் ஆரை $\frac{a}{\sqrt{3}}$ ஐயும் நிறை W ஐயும் உடைய ஓர் ஒப்பமான சீரான மெல்லிய வட்டத் தட்டு சட்டம் $ABCD$ இனுள்ளே BC, CD ஆகிய கோல்களை முறையே E, F ஆகிய புள்ளிகளில் தொடுமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது.



உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு, சட்டத்தையும் தட்டையும் கொண்ட தொகுதியானது, ஒரே கிடை மட்டத்தில் இருக்கும் P, Q என்னும் இரு நிலைத்த ஒப்பமான முளைகளின் மூலம், ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே நாப்பத்திற் பேணப்படுகின்றது. $A\hat{B}C = \frac{2\pi}{3}$ எனவும் $CE = CF = a$ எனவும் கோடு AOC நிலைக்குத்தானது எனவும் தரப்பட்டுள்ளது.

CD இன் மூலம் BC மீது மூட்டு C இல் உஞ்ற்றப்படும் மறுதாக்கத்தின் பருமன் $\frac{\sqrt{3}}{2}W$ எனக் காட்டுவதோடு இரு முளைகளுக்குமிடையிலான தூரத்தைக் காண்க.

(*b*) உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ள சட்டப்படல் AB, BC, CD, DA, AC என்னும் ஐந்து இலேசான கோல்களை அவற்றின் முனைகளில் ஒப்பமாக மூட்டி அமைக்கப்பட்டுள்ளது. $AC = 2a$, $B\hat{A}C = 90^\circ$, $C\hat{D}A = 90^\circ$, $A\hat{B}C = 30^\circ$, $C\hat{A}D = 30^\circ$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. மூட்டு B இல் ஒரு சுமை W ஐத் தொங்கவிட்டு, சட்டப்படலை A இல் ஒரு நிலைத்த புள்ளியுடன் ஒப்பமாகப் பிணைத்து, AC நிலைக்குத்தாக இருக்கத் தொகுதியானது, மூட்டு D இல் நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிப் பிரயோகித்த ஒரு விசை P இனால், ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே நாப்பத்தில் பேணப்படுகின்றது.



(i) P இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(ii) போவின் குறிப்பீட்டைப் பயன்படுத்தி B, C, D ஆகிய மூட்டுகளுக்கு ஒரு தகைப்பு வரிப்படத்தை வரைக.

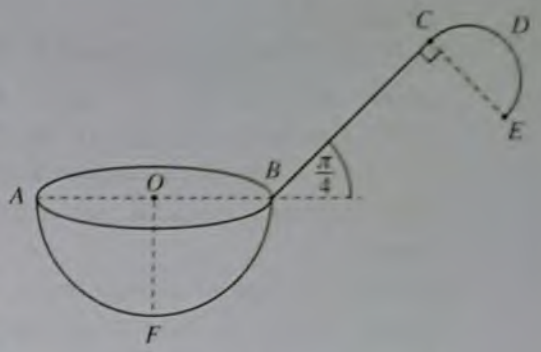
இதிலிருந்து, கோல்களில் உள்ள தகைப்புகளை அவை இழுவைகளா, உதைப்புகளா எனக் கூறிக் காண்க.

[பக். 10 ஐப் பார்க்க

16. (i) ஆரை a ஐ உடைய ஒரு மெல்லிய சீரான அரைவட்டக் கம்பியின் திணிவு மையம் அதன் மையத்திலிருந்து தூரம் $\frac{2a}{\pi}$ இலும்

(ii) ஆரை a ஐ உடைய ஒரு மெல்லிய சீரான அரைக்கோள ஓட்டின் திணிவு மையம் அதன் மையத்திலிருந்து தூரம் $\frac{a}{2}$ இலும்

இருக்கின்றனவெனக் காட்டுக.



உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு ஆரை $\sqrt{2}a$ ஐ உடைய ஓர் அரைவட்டப் பகுதி CDE ஐயும் நீளம் $2\sqrt{2}a$ ஐ உடைய ஒரு நேர்ப் பகுதி BC ஐயும் கொண்ட ஒரு மெல்லிய சீரான கம்பி $BCDE$ இனாற் செய்யப்பட்ட ஒரு கைப்பிடியை மையம் O ஐயும் ஆரை $2a$ ஐயும் உடைய ஒரு மெல்லிய சீரான அரைக்கோள ஓட்டுடன் விறைப்பாகப் பொருத்தி ஒரு கரண்டி செய்யப்பட்டுள்ளது. விட்டம் CE ஆனது BC இற்குச் செங்குத்தானது. A, B ஆகிய புள்ளிகள் அரைக்கோள ஓட்டின் வட்ட விளிம்பின் ஒரு விட்டத்தின் முனைகளாக இருக்கும் அதே வேளை புள்ளி F ஆனது அரைக்கோள ஓட்டின் மேற்பரப்பு மீது. OF ஆனது OB இற்குச் செங்குத்தாக இருக்குமாறு, உள்ளது.

$\overrightarrow{AB}$ இற்கும் $\overrightarrow{BC}$ இற்குமிடையே உள்ள கோணம் $\frac{\pi}{4}$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை O, A, B, C, D, E, F ஆகிய புள்ளிகள் ஒரே தளத்தில் இருக்கின்றன. அரைக்கோள ஓட்டின் ஓரலகுப் பரப்பளவின் திணிவு σ உம் கைப்பிடியின் ஓரலகு நீளத்தின் திணிவு $\sqrt{2}a\sigma$ உம் ஆகும். கரண்டியின் திணிவு மையம் OB இற்குக் கீழே தூரம் $\left(\frac{3\pi-4}{2+5\pi}\right)a$ இலும் OF இலிருந்து தூரம் $\left(\frac{8+5\pi}{2+5\pi}\right)a$ இலும் உள்ளதெனக் காட்டுக.

இப்போது, திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை புள்ளி A இல், OF நிலைக்குத்தாகவும் புள்ளி F ஒரு கிடைத் தரையைத் தொட்டுக் கொண்டும் இருக்கக் கரண்டி நாப்பத்தில் வைக்கப்படத்தக்கதாகப் பொருத்தப்பட்டுள்ளது. m ஐ a, σ ஆகியவற்றிற் காண்க.

17. (*a*) A, B ஆகியன இரு சர்வசமப் பைகளாகும். பை A இல் 3 கறுப்புப் பந்துகளும் 2 வெள்ளைப் பந்துகளும் இருக்கும் அதே வேளை பை B இல் 4 கறுப்புப் பந்துகளும் 3 வெள்ளைப் பந்துகளும் உள்ளன. பந்துகள் அவற்றின் நிறங்கள் தவிர எல்லா அம்சங்களிலும் சர்வசமனானவை. இப்போது 1, 2, 3, 4, 5, 6 என எண்ணிடப்பட்ட முகங்கள் உள்ள இரு ஆறுபக்கக் கோடாத தாயக் கட்டைகள் ஒருமிக்க உருட்டப்படுகின்றன. அப்போது கிடைக்கும் எண்களின் கூட்டுத்தொகை ஒரு முதன்மை எண்ணெனின், பை A தெரிந்தெடுக்கப்படுகின்றது; இல்லையெனின், பை B தெரிந்தெடுக்கப்படுகின்றது. தெரிந்தெடுக்கப்பட்ட பையிலிருந்து ஒரு பந்து எழுமாற்றாக வெளியே எடுக்கப்படுகின்றது.

(i) வெளியே எடுக்கப்பட்ட பந்து கறுப்புப் பந்தாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

(ii) வெளியே எடுக்கப்பட்ட பந்து கறுப்புப் பந்தெனத் தரப்படுமெனின், இப்பந்து பை A இலிருந்து வெளியே எடுக்கப்பட்டமைக்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

(*b*) ஒரு குறித்த பணியைச் செய்து முடிப்பதற்காக 100 மாணவர்கள் எடுத்த நேரங்கள் பின்வரும் அட்டவணையில் பொழிப்பாக்கப்பட்டுள்ளன.

எடுத்த நேரம் (செக்கன்)	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
0 – 10	10
10 – 20	20
20 – 30	35
30 – 40	20
40 – 50	15

மேலே தரப்பட்ட மீடிறன் பரம்பலின் இடையம், இடை, மாறற்றிறன் ஆகியவற்றை மதிப்பிடுக.

பின்னர் வேறு 25 மாணவர்களிடம் அதே பணி ஒப்படைக்கப்பட்டது. இம்மாணவர்கள் மேற்குறித்த அட்டவணையில் இருக்கும் ஒவ்வொரு நேர ஆயிடைக்கும் 5 பேர் வீதம் உட்பட்டனர். புதிய பரம்பலின் இடையை மதிப்பிடுக.

* * *